

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Пименов В.Г., Лекомцев А.В., 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-148-440-454>

УДК 519.633



Компактная схема для решения супердиффузионного уравнения с несколькими переменными запаздываниями

Владимир Германович ПИМЕНОВ^{1,2}, Андрей Валентинович ЛЕКОМЦЕВ¹

¹ ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина»

620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

² ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского»

Уральского отделения Российской академии наук

620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16

Аннотация. Рассматривается супердиффузионное уравнение с дробными производными Рисса по пространству с несколькими переменными запаздываниями. Производится дискретизация задачи. По времени конструируется аналог разностного метода Кранка–Николсона с кусочно-линейной интерполяцией для учета эффекта переменного запаздывания и с экстраполяцией продолжением для того, чтобы неявность метода стала конечномерной. По пространству конструируется аналог компактной схемы со специальной заменой дробных производных Рисса дробными центральными разностями. В результате метод сводится к решению на каждом шаге времени системы линейных алгебраических уравнений с симметричной и положительно определенной главной матрицей. Изучается порядок малости относительно шагов дискретизации по времени Δ и пространству h невязки метода без интерполяции и с интерполяцией, он равен $O(\Delta^2 + h^4)$. Основной результат состоит в доказательстве того, что метод сходится с порядком $O(\Delta^2 + h^4)$ в энергетической и компактной норме послыонного вектора погрешности. Приводятся результаты тестовых примеров для супердиффузионных уравнений с постоянным и переменным запаздываниями. Вычислимые порядки сходимости по каждому шагу дискретизации в примерах оказались близки к теоретически полученным порядкам сходимости по соответствующим шагам дискретизации.

Ключевые слова: уравнение супердиффузии, несколько переменных запаздываний, компактная схема, кусочно-линейная интерполяция

Для цитирования: Пименов В.Г., Лекомцев А.В. Компактная схема для решения супердиффузионного уравнения с несколькими переменными запаздываниями // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 148. С. 440–454.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-148-440-454>

SCIENTIFIC ARTICLE

© V. G. Pimenov, A. V. Lekomtsev, 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-148-440-454>

A compact scheme for solving a superdiffusion equation with several variable delays

Vladimir G. PIMENOV^{1,2}, Andrei V. LEKOMTSEV¹

¹ Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin

19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation

² N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics

of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences

16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation

Abstract. A superdiffusion equation with Riesz fractional derivatives with respect to space with several delay variables is considered. The problem is discretized. For this purpose, an analog of the Crank–Nicolson difference method with piecewise linear interpolation to account for the effect of variable delay and with extrapolation by continuation is constructed in time so that the implicitness of the method becomes finite-dimensional. An analog of a compact scheme with a special replacement of Riesz fractional derivatives by fractional central differences is constructed in space. As a result, the method is reduced to solving a system of linear algebraic equations with symmetric and positive-definite main matrix at each time step. The order of smallness with respect to the discretization time-steps Δ and space-steps h of the residual of the method without interpolation and with interpolation is studied; it is equal to $O(\Delta^2 + h^4)$. The main result consists in proving that the method converges with the order $O(\Delta^2 + h^4)$ in the energy and compact norm of the layered error vector. The results of test examples for superdiffusion equations with constant and variable delay are presented. The computable orders of convergence for each discretization step in the examples turned out to be close to the theoretically obtained orders of convergence for the corresponding discretization steps.

Keywords: superdiffusion equation, several variable delays, compact scheme, piecewise linear interpolation

Mathematics Subject Classification: 65N06, 34A08.

For citation: Pimenov V.G., Lekomtsev A.V. A compact scheme for solving a superdiffusion equation with several variable delays. *Vestnik Rossiyskikh Universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:148 (2024), 440–454.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-148-440-454> (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Уравнения в частных производных с запаздывающим аргументом широко применяются в математическом моделировании (см., например, [1, 2]), также в последнее время все чаще в математических моделях используются дробные производные. Численные алгоритмы решения уравнений с частными производными с эффектом запаздывания изучались, например, в [3, 4]. Литература по численным методам решения уравнений с дробными производными огромна, отметим лишь работы [5–8], в которых рассматривались численные методы решения уравнения супердиффузионного типа, т. е. с дробной производной по пространственной переменной порядка от 1 до 2. Для супердиффузионных уравнений с функциональным эффектом запаздывания в работе [9] построен и исследован численный метод порядка $\Delta^2 + h$, где Δ — шаг разбиения по времени, а h — шаг разбиения по пространству, а в работе [10] построен и исследован численный метод порядка $\Delta^2 + h^2$. В работе [11] на основе процедуры экстраполяции Ричардсона был построен метод порядка $\Delta^3 + h^3$, однако при жестком условии пропорциональности шагов Δ и h .

Целью данной работы было построение для супердиффузионного уравнения с эффектом запаздывания численного метода порядка $\Delta^2 + h^4$, основанного на идеях компактной разностной схемы. Компактная схема изучалась для разных дробных уравнений без запаздывания во многих работах, в частности, для субдиффузионных уравнений в [12, 13], для дробного по времени и пространству уравнения Блоха–Торри в [14], для субдиффузионных уравнений с постоянным запаздыванием в [15].

В данной работе для супердиффузионного уравнения с производной Рисса и эффектом запаздывания строится аналог метода Кранка–Никольсона по временной переменной и аналог компактной схемы для дробной пространственной переменной. Основным результатом работы — доказательство сходимости в энергетической норме с порядком $\Delta^2 + h^4$. Техника доказательства потребовала ограничить эффект запаздывания до уравнений с несколькими переменными запаздываниями. В силу переменности запаздываний, существенным элементом алгоритма является интерполяция и экстраполяция с заданными свойствами для функции-предыстории численной модели, в работе применяется кусочно-линейная интерполяция с экстраполяцией продолжением.

1. Постановка задачи и основные предположения

Рассмотрим уравнение супердиффузионного типа с несколькими переменными запаздываниями

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = d \frac{\partial^\alpha u}{\partial |x|^\alpha} + f(x, t, u(t - \tau_1(t)), u(t - \tau_2(t)), \dots, u(t - \tau_K(t))), \quad (1.1)$$

где $0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq X$ — независимые переменные, $u(x, t)$ — искомая функция решения, $d > 0$ — коэффициент супердиффузии, величины запаздывания удовлетворяют ограничениям $0 \leq \tau_k(t) \leq \tau$ для всех $k = 1, \dots, K$ и $t \in [0, T]$. Дробная производная Рисса по пространству порядка α , $1 < \alpha < 2$, определяется формулой

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial |x|^\alpha} = -\frac{1}{2\cos(\alpha\pi/2)\Gamma(2-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^x \frac{u(\xi, t)}{|x-\xi|^{\alpha-1}} d\xi.$$

Заданы граничные условия

$$u(0, t) = 0, \quad u(X, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2)$$

и начальные условия

$$u(x, s) = \varphi(x, s), \quad 0 \leq x \leq X, \quad -\tau \leq s \leq 0. \quad (1.3)$$

Будем предполагать, что решение $u(x, t)$ задачи (1.1)–(1.3) существует и единственно. Кроме того, при доказательстве сходимости численных методов будем предполагать необходимую гладкость решения $u(x, t)$.

Дополнительно будем предполагать, что функция $f(x, t, u^1, u^2, \dots, u^K)$ липшицева по u^k , т. е. существует постоянная L_f такая, что для всех $x \in [0, X]$, $t \in [0, T]$, $u^1, u^2, \dots, u^K$, $v^1, v^2, \dots, v^K$ выполняется

$$|f(x, t, u^1, u^2, \dots, u^K) - f(x, t, v^1, v^2, \dots, v^K)| \leq L_f \sum_{k=1}^K |u^k - v^k|. \quad (1.4)$$

2. Дискретизация. Метод Кранка–Никольсон с кусочно-линейной интерполяцией и дробным оператором центральных разностей

Введем шаг по времени $\Delta = \frac{\tau}{M_0}$, где M_0 — натуральное, и пусть $M = [\frac{T}{\Delta}]$. Введем точки (узлы по времени) $t_j = j\Delta$, $j = -M_0, \dots, M$. Полуцелые узлы будем обозначать $t_{j+\frac{1}{2}} = t_j + \frac{\Delta}{2}$.

Разобьем отрезок $[0, X]$ на части, введя шаг по пространству $h = \frac{X}{N}$, где N — целое. Введем точки (узлы по пространству) $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N$. Аппроксимацию функции $u(x_i, t_j)$ в узлах будем обозначать U_j^i .

При всяком фиксированном $i = 0, \dots, N$ введем дискретную предысторию к моменту t_j , $j = 0, \dots, M$: $\{U_k^i\}_j = \{U_k^i, j - M_0 \leq k \leq j\}$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Назовем отображение $I : \{U_k^i\}_j \rightarrow U_j^i(\cdot) \in C[t_j - \tau, t_{j+\frac{1}{2}}]$ оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории.

О п р е д е л е н и е 2.2. Будем говорить, что оператор интерполяции-экстраполяции имеет *порядок погрешности* p на точном решении, если существуют константы C_1 и C_2 такие, что для всех i, j и $t \in [t_j - \tau, t_{j+\frac{1}{2}}]$ выполняется неравенство

$$|U_j^i(t) - u(x_i, t)| \leq C_1 \max_{j-M_0 \leq k \leq j} |U_k^i - u(x_i, t_k)| + C_2 \Delta^p.$$

Рассмотрим кусочно-линейную интерполяцию $I(\{U_k^i\}_j) = U_j^i(\cdot)$, задаваемую соотношениями

$$U_j^i(t_j + s) = \frac{1}{\Delta}((t_k - t_j - s)U_{k-1}^i + (t_j + s - t_{k-1})U_k^i), \quad (2.1)$$

$$t_{k-1} \leq t_j + s \leq t_k, \quad j - M_0 \leq k \leq j,$$

с экстраполяцией продолжением

$$U_j^i(t_j + s) = \frac{1}{\Delta}((-s)U_{j-1}^i + (\Delta + s)U_j^i), \quad t_j \leq t_j + s \leq t_{j+\frac{1}{2}}. \quad (2.2)$$

Кусочно-линейная интерполяция с экстраполяцией продолжением имеет порядок 2, если точное решение $u(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируемо по t на промежутке $[-\tau, T]$ (см. [16, с. 97]). Кусочно-линейная интерполяция обладает следующим свойством.

Пусть $u(t)$ и $v(t)$ — результаты кусочно-линейной интерполяции по узлам $\{u_k\}_j$ и $\{v_k\}_j$ соответственно и $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $j - M_0 \leq k \leq j$. Тогда

$$|u(t) - v(t)| \leq |u_{k-1} - v_{k-1}| + |u_k - v_k|. \quad (2.3)$$

Экстраполяция продолжением обладает следующим свойством. Пусть $u(t)$ и $v(t)$ являются результатами экстраполяции продолжением кусочно-линейной интерполяции по узлам $\{u_k\}_j$ и $\{v_k\}_j$ соответственно и $t \in [t_j, t_{j+\frac{1}{2}}]$. Тогда

$$|u(t) - v(t)| \leq \frac{1}{2}|u_{j-1} - v_{j-1}| + \frac{3}{2}|u_j - v_j|. \quad (2.4)$$

Оба эти свойства проверяются по определению кусочно-линейной интерполяции и экстраполяции продолжением. Объединяя (2.3) и (2.4), получаем, что если $u(t)$ и $v(t)$ результаты кусочно-линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением по узлам $\{u_k\}_j$ и $\{v_k\}_j$ соответственно и $t \in [t_j - \tau, t_{j+\frac{1}{2}}]$, то

$$|u(t) - v(t)| \leq \frac{3}{2}(|u_{k-1} - v_{k-1}| + |u_k - v_k|), \quad (2.5)$$

где $t \in [t_{k-1}, t_k]$ в случае интерполяции и $k = j$ в случае экстраполяции. Назовем это свойство *квазилипшицевостью* с константой $3/2$.

Для аппроксимации дробной производной Рисса выберем метод дробных центральных разностей [7]. Пусть

$$g_k^\alpha = \frac{(-1)^k \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha/2 - k + 1) \Gamma(\alpha/2 + k + 1)}, \quad k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$$

Тогда, если функция $u(x, t)$ пять раз непрерывно дифференцируема по x на отрезке $[0, X]$, то (см. [7])

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial |x|^\alpha} = -h^{-\alpha} \sum_{k=-\frac{X-x}{h}}^{\frac{x}{h}} g_k^\alpha u(x - kh, t) + O(h^2), \quad |O(h^2)| \leq C_3 h^2.$$

Методом Кранка–Николсон назовем неявную разностную схему

$$\begin{aligned} \frac{U_{j+1}^i - U_j^i}{\Delta} = & -\frac{1}{2}dh^{-\alpha} \sum_{k=-N+i+1}^{i-1} g_k^\alpha U_{j+1}^{i-k} - \frac{1}{2}dh^{-\alpha} \sum_{k=-N+i+1}^{i-1} g_k^\alpha U_j^{i-k} \\ & + f(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}, U_j^i(t_{j+\frac{1}{2}} - \tau_1(t_{j+\frac{1}{2}})), U_j^i(t_{j+\frac{1}{2}} - \tau_2(t_{j+\frac{1}{2}})), \dots, U_j^i(t_{j+\frac{1}{2}} - \tau_K(t_{j+\frac{1}{2}}))), \\ & i = 1, \dots, N-1, \quad j = 0, \dots, M-1, \end{aligned} \quad (2.6)$$

с начальными условиями

$$U_j^i(t) = \varphi(x_i, t), \quad -\tau \leq t \leq 0, \quad i = 0, \dots, N,$$

и граничными условиями

$$U_j^0 = 0, \quad U_j^N = 0, \quad j = 0, \dots, M,$$

где $U_j^i(t)$ — результат действия оператора кусочно-линейной интерполяции (2.1) с экстраполяцией (2.2). Обозначим

$$\delta_x^\alpha U_j^i = h^{-\alpha} \sum_{k=-N+i+1}^{i-1} g_k^\alpha U_j^{i-k},$$

$$\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}}^i = f(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}, U_j^i(t_{j+\frac{1}{2}} - \tau_1(t_{j+\frac{1}{2}})), U_j^i(t_{j+\frac{1}{2}} - \tau_2(t_{j+\frac{1}{2}})), \dots, U_j^i(t_{j+\frac{1}{2}} - \tau_K(t_{j+\frac{1}{2}}))).$$

Тогда метод (2.6) может быть записан в краткой форме

$$\frac{U_{j+1}^i - U_j^i}{\Delta} = -\frac{1}{2} d\delta_x^\alpha U_{j+1}^i - \frac{1}{2} d\delta_x^\alpha U_j^i + \tilde{f}_{j+\frac{1}{2}}^i.$$

Этот метод был изучен в работе [10] в более общем случае функционального запаздывания и двух пространственных переменных. Как следует из результатов работы [10], метод устойчив и сходится с порядком $\Delta^2 + h^2$. Цель этой статьи состоит в построении алгоритма более высокого порядка сходимости на основе метода (2.6).

3. Компактная схема

Введем следующие операторы

$$\delta_x^2 U_j^i = \frac{U_j^{i-1} - 2U_j^i + U_j^{i+1}}{h^2}, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$HU_j^i = U_j^i + \frac{\alpha h^2}{24} \delta_x^2 U_j^i, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Сконструируем метод, который по аналогии с подобными методами для других уравнений будем называть *компактной схемой*:

$$\frac{HU_{j+1}^i - HU_j^i}{\Delta} = -\frac{1}{2} d\delta_x^\alpha U_{j+1}^i - \frac{1}{2} d\delta_x^\alpha U_j^i + H\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}}^i. \quad (3.1)$$

Перепишем метод в виде

$$(H + \frac{\Delta}{2} d\delta_x^\alpha) U_{j+1}^i = (H - \frac{\Delta}{2} d\delta_x^\alpha) U_j^i + \Delta H \tilde{f}_{j+\frac{1}{2}}^i. \quad (3.2)$$

Рассмотрим главную матрицу $A = H + \frac{\Delta}{2} d\delta_x^\alpha$ этой системы. Распишем матрицы

$$H = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\alpha}{12} & \frac{\alpha}{24} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\alpha}{24} & 1 - \frac{\alpha}{12} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\alpha}{24} & 1 - \frac{\alpha}{12} & \frac{\alpha}{24} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 - \frac{\alpha}{12} \end{pmatrix},$$

$$\delta_x^\alpha = \begin{pmatrix} g_0 & g_{-1} & \dots & g_{2-i} & g_{1-i} & g_{-i} & \dots & g_{2-N} \\ g_1 & g_0 & \dots & g_{3-i} & g_{2-i} & g_{1-i} & \dots & g_{3-N} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ g_{i-1} & g_{i-2} & \dots & g_{-1} & g_0 & g_1 & \dots & g_{i+1-N} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ g_{N-2} & g_{N-3} & \dots & g_{N-i} & g_{N-i-1} & g_{N-i-2} & \dots & g_0 \end{pmatrix}.$$

Матрица H симметричная и положительно определенная. В силу свойств коэффициентов $g_0 > 0$, $g_{-k} = g_k < 0$, $k \neq 0$, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k = 0$, матрица δ_x^α также симметричная и положительно определенная. Откуда следует, что матрица A — симметричная и положительно определенная, т. е. система (3.2) однозначно разрешима.

4. Невязка компактной схемы

О п р е д е л е н и е 4.1. Невязкой без интерполяции метода (3.1) назовем

$$\psi_j^i = H \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta} + \frac{1}{2} d\delta_x^\alpha u(x_i, t_{j+1}) + \frac{1}{2} d\delta_x^\alpha u(x_i, t_j) - H f_{j+\frac{1}{2}}^i,$$

$$f_{j+\frac{1}{2}}^i = f(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}, u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}} - \tau_1(t_{j+\frac{1}{2}})), u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}} - \tau_2(t_{j+\frac{1}{2}})), \dots, u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}} - \tau_K(t_{j+\frac{1}{2}}))).$$

Лемма 4.1. Если точное решение $u(x, t)$ шесть раз непрерывно дифференцируемо по x и по t , причем смешанные частные производные до шестого порядка непрерывны, функция f дважды непрерывно дифференцируема по x , то невязка без интерполяции метода (3.1) представима в виде

$$\psi_j^i = O(\Delta^2 + h^4), \quad |O(\Delta^2 + h^4)| \leq C_4(\Delta^2 + h^4).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разложим по формуле Тейлора величины, входящие в определение невязки без интерполяции метода (3.1) в окрестности точки с координатами $(x_i, t_{j+\frac{1}{2}})$. Для краткости будем опускать аргумент $(x_i, t_{j+\frac{1}{2}})$ у функции $u = u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}})$ и ее производных. Тогда

$$\begin{aligned} \psi_j^i &= H \left(\frac{u}{\Delta} + \frac{1}{2} u'_t + \frac{\Delta}{4} u''_{tt} + O(\Delta^2) - \frac{u}{\Delta} + \frac{1}{2} u'_t - \frac{\Delta}{4} u''_{tt} + O(\Delta^2) \right) \\ &\quad + \frac{d}{2} \delta_x^\alpha \left(u + \frac{\Delta}{2} u'_t + O(\Delta^2) + u - \frac{\Delta}{2} u'_t + O(\Delta^2) \right) - H f_{j+\frac{1}{2}}^i \\ &= H u'_t + d\delta_x^\alpha u - H f_{j+\frac{1}{2}}^i + O(\Delta^2). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Умножим уравнение (1.1) при $u = u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}})$ на H , получим

$$H u'_t = dH \frac{\partial^\alpha u}{\partial |x|^\alpha} + H f_{j+\frac{1}{2}}^i. \quad (4.2)$$

Выполняется (см. [14])

$$H \frac{\partial^\alpha u}{\partial |x|^\alpha} = -\delta_x^\alpha u + O(h^4). \quad (4.3)$$

Тогда из (4.1), (4.2), (4.3) вытекает утверждение леммы. $\square$

О п р е д е л е н и е 4.2. Невязкой метода (3.1) с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением назовем величину

$$\hat{\psi}_j^i = H \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta} + \frac{1}{2} d\delta_x^\alpha u(x_i, t_{j+1}) + \frac{1}{2} d\delta_x^\alpha u(x_i, t_j) - H \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^i, \quad (4.4)$$

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^i = f(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}, \hat{u}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}} - \tau_1(t_{j+\frac{1}{2}})), \hat{u}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}} - \tau_2(t_{j+\frac{1}{2}})), \dots, \hat{u}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}} - \tau_K(t_{j+\frac{1}{2}}))),$$

где $\hat{u}(x_i, t_j + s)$ — результат кусочно-линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением точного решения:

$$\begin{aligned}\hat{u}(x_i, t_j + s) &= \frac{1}{\Delta}((t_k - t_j - s)u(x_i, t_{k-1}) + (t_j + s - t_{k-1})u(x_i, t_k)), \\ t_{k-1} &\leq t_j + s \leq t_k, \quad j - M_0 \leq k \leq j, \\ \hat{u}(x_i, t_j + s) &= \frac{1}{\Delta}((-s)u(x_i, t_{j-1}) + (\Delta + s)u(x_i, t_j)), \quad t_j \leq t_j + s \leq t_{j+\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Лемма 4.2. При условиях леммы 4.1 невязка метода (3.1) с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением представима в виде

$$\hat{\psi}_j^i = O(\Delta^2 + h^4), \quad |O(\Delta^2 + h^4)| \leq C_5(\Delta^2 + h^4).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Невязка без интерполяции и невязка с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением связаны соотношением

$$\hat{\psi}_j^i = \psi_j^i + Hf_{j+\frac{1}{2}}^i - H\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^i. \quad (4.5)$$

В силу определения оператора H , липшицевости (1.4) функции f и свойств оператора кусочно-линейной интерполяцией с экстраполяцией продолжением получаем

$$\begin{aligned}|H(f_{j+\frac{1}{2}}^i - \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^i)| &\leq \max_{i=1, \dots, N-1} |f_{j+\frac{1}{2}}^i - \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^i| \\ &\leq \max_{i=1, \dots, N-1} L_f \sum_{k=1}^K |u(x_i, t_{j+\frac{1}{2}} - \tau_k(t_{j+\frac{1}{2}})) - \hat{u}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}} - \tau_k(t_{j+\frac{1}{2}}))| \leq KL_f C_2 \Delta^2.\end{aligned}$$

Учитывая эту оценку, а также утверждение леммы 4.1, из (4.5) вытекает утверждение леммы 4.2. $\square$

5. СХОДИМОСТЬ КОМПАКТНОЙ СХЕМЫ

Рассмотрим векторное пространство размерности $N - 1$, в котором введем скалярное произведение: если $u = (u^1, u^2, \dots, u^{N-1})$ и $v = (v^1, v^2, \dots, v^{N-1})$, то

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} hu^i v^i.$$

Введем энергетическую норму

$$\|u\|^2 = (u, u),$$

компактную норму и норму предыстории погрешности

$$\|u\|_H^2 = (u, Hu), \quad \|\{u_k\}_j\|_\tau = \max_{j-M_0 \leq k \leq j} \|u_k\|_H.$$

Выполняются оценки (см. [12])

$$\frac{2}{3}\|u\|^2 \leq \|u\|_H^2 \leq \|u\|^2. \quad (5.1)$$

Справедливы следующие вспомогательные оценки.

Лемма 5.1.

$$\|Hu\| \leq \|u\|. \quad (5.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Наряду с вектором $u = (u^1, u^2, \dots, u^{N-1})$ введем векторы смещения $u^- = (0, u^1, \dots, u^{N-2})$ и $u^+ = (u^2, u^3, \dots, 0)$. По определению энергетической нормы выполняются соотношения $\|u^-\| \leq \|u\|$, $\|u^+\| \leq \|u\|$.

Вектор Hu представим в виде

$$Hu = u + \frac{\alpha h^2}{24} \delta_x^2 u = u + \frac{\alpha h^2}{24} \frac{u^- - 2u + u^+}{h^2} = \frac{1}{24} (\alpha u^- + (24 - 2\alpha)u + \alpha u^+),$$

тогда

$$\|Hu\| \leq \frac{1}{24} (\alpha \|u^-\| + (24 - 2\alpha)\|u\| + \alpha \|u^+\|) \leq \frac{1}{24} (\alpha \|u\| + (24 - 2\alpha)\|u\| + \alpha \|u\|) = \|u\|.$$

□

Лемма 5.2. Если $a_1, a_2, \dots, a_K$ — произвольные числа, то

$$\left(\sum_{k=1}^K a_k \right)^2 \leq 2^{K-1} \sum_{k=1}^K a_k^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проводится индукцией по K . □

Введем погрешность $\varepsilon_j^i = u(x_i, t_j) - U_j^i$ и послойную векторную погрешность метода (3.1) как вектор ε_j с координатами ε_j^i , $i = 1, \dots, N-1$.

Теорема 5.1. Пусть выполняются условия леммы 4.1. Тогда

$$\|\varepsilon_j\| \leq C(\Delta^2 + h^4).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя (3.1) и (4.4), выпишем уравнения для координат вектора погрешности

$$H \frac{\varepsilon_{j+1}^i - \varepsilon_j^i}{\Delta} = -\frac{1}{2} d\delta_x^\alpha \varepsilon_{j+1}^i - \frac{1}{2} d\delta_x^\alpha \varepsilon_j^i + H(\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}}^i - \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^i) + \hat{\psi}_j^i. \quad (5.3)$$

Введем векторы $\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}} = (\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}}^1, \tilde{f}_{j+\frac{1}{2}}^2, \dots, \tilde{f}_{j+\frac{1}{2}}^{N-1})$, $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = (\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^1, \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^2, \dots, \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^{N-1})$, $\hat{\psi}_{j+\frac{1}{2}} = (\hat{\psi}_{j+\frac{1}{2}}^1, \hat{\psi}_{j+\frac{1}{2}}^2, \dots, \hat{\psi}_{j+\frac{1}{2}}^{N-1})$ и запишем (5.3) в векторном виде

$$H \frac{\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j}{\Delta} = -\frac{1}{2} d\delta_x^\alpha \varepsilon_{j+1} - \frac{1}{2} d\delta_x^\alpha \varepsilon_j + H(\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}) + \hat{\psi}_j.$$

Умножим это уравнение скалярно на вектор $\varepsilon_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\varepsilon_j + \varepsilon_{j+1})$, получим

$$\left(H \frac{\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j}{\Delta}, \varepsilon_{j+\frac{1}{2}} \right) = -\left(d\delta_x^\alpha \varepsilon_{j+\frac{1}{2}}, \varepsilon_{j+\frac{1}{2}} \right) + \left(H(\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}), \varepsilon_{j+\frac{1}{2}} \right) + \left(\hat{\psi}_j, \varepsilon_{j+\frac{1}{2}} \right). \quad (5.4)$$

Левая часть этого уравнения преобразуется к виду

$$\left(H \frac{\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j}{\Delta}, \varepsilon_{j+\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2\Delta} (\|\varepsilon_{j+1}\|_H^2 - \|\varepsilon_j\|_H^2). \quad (5.5)$$

Первое слагаемое в правой части (5.4) в силу положительности d и положительной определенности δ_x^α оценивается следующим образом

$$-(d\delta_x^\alpha \varepsilon_{j+\frac{1}{2}}, \varepsilon_{j+\frac{1}{2}}) \leq 0. \quad (5.6)$$

Оценим второе слагаемое в правой части (5.4), учитывая (5.2) и (5.1),

$$\begin{aligned} (H(\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}), \varepsilon_{j+\frac{1}{2}}) &\leq \|H(\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j+\frac{1}{2}})\| \|\varepsilon_{j+\frac{1}{2}}\| \\ &\leq \|\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}\| \frac{3}{2} \|\varepsilon_{j+\frac{1}{2}}\|_H \leq \|\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}\| \frac{3}{4} (\|\varepsilon_{j+1}\|_H + \|\varepsilon_j\|_H). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Оценим компоненты вектора $\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}$, учитывая липшицевость (1.4) функции f

$$\begin{aligned} |\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}}^i - \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^i| &= |f(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}, U_j^i(t_{j+\frac{1}{2}} - \tau_1(t_{j+\frac{1}{2}})), U_j^i(t_{j+\frac{1}{2}} - \tau_2(t_{j+\frac{1}{2}})), \dots, U_j^i(t_{j+\frac{1}{2}} - \tau_K(t_{j+\frac{1}{2}}))) \\ &\quad - f(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}, \hat{u}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}} - \tau_1(t_{j+\frac{1}{2}})), \hat{u}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}} - \tau_2(t_{j+\frac{1}{2}})), \dots, \hat{u}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}} - \tau_K(t_{j+\frac{1}{2}})))| \\ &\leq L_f \sum_{l=1}^K |U_j^i(t_{j+\frac{1}{2}} - \tau_l(t_{j+\frac{1}{2}})) - \hat{u}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}} - \tau_l(t_{j+\frac{1}{2}}))|. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Учитывая свойство квазилипшицевости (2.5) оператора кусочно-линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением, получаем

$$|U_j^i(t_{j+\frac{1}{2}} - \tau_l(t_{j+\frac{1}{2}})) - \hat{u}(x_i, t_{j+\frac{1}{2}} - \tau_l(t_{j+\frac{1}{2}}))| \leq \frac{3}{2} (|\varepsilon_{k(l)-1}| + |\varepsilon_{k(l)}|), \quad (5.9)$$

где $t_{j+\frac{1}{2}} - \tau_l(t_{j+\frac{1}{2}}) \in [t_{k(l)-1}, t_{k(l)}]$ или $k(l) = j$ в случае $t_{j+\frac{1}{2}} - \tau_l(t_{j+\frac{1}{2}}) > t_j$. Таким образом, из (5.8) и (5.9) следует

$$|\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}}^i - \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^i| \leq L_f \frac{3}{2} \sum_{l=1}^K (|\varepsilon_{k(l)-1}| + |\varepsilon_{k(l)}|).$$

По определению энергетической нормы получаем

$$\|\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}\|^2 = \sum_{i=1}^{N-1} h |\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}}^i - \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^i|^2 \leq (L_f \frac{3}{2})^2 \sum_{i=1}^{N-1} h (\sum_{l=1}^K (|\varepsilon_{k(l)-1}| + |\varepsilon_{k(l)}|))^2.$$

Из полученного соотношения, используя оценку леммы 5.2, следует

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}\|^2 &\leq (L_f \frac{3}{2})^2 \sum_{i=1}^{N-1} h 2^{2K-1} \sum_{l=1}^K (|\varepsilon_{k(l)-1}|^2 + |\varepsilon_{k(l)}|^2) \\ &= (L_f \frac{3}{2})^2 2^{2K-1} \sum_{l=1}^K (\|\varepsilon_{k(l)-1}\|^2 + \|\varepsilon_{k(l)}\|^2). \end{aligned}$$

Извлекая корень, получаем

$$\|\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}\| \leq L_f \frac{3}{2} 2^{K-\frac{1}{2}} \left(\sum_{l=1}^K (\|\varepsilon_{k(l)-1}\|^2 + \|\varepsilon_{k(l)}\|^2) \right)^{\frac{1}{2}} \leq 3L_f 2^K \sum_{l=1}^K (\|\varepsilon_{k(l)-1}\| + \|\varepsilon_{k(l)}\|).$$

Оценивая каждое слагаемое суммы в правой части этого соотношения, получаем неравенство

$$\|\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}\| \leq 3L_f 2^{K+1} K \max_{j-M_0 \leq k \leq j} \|\varepsilon_k\|. \quad (5.10)$$

Из (5.7) и (5.10) вытекает оценка второго слагаемого в правой части (5.4)

$$\begin{aligned} (H(\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{j+\frac{1}{2}}), \varepsilon_{j+\frac{1}{2}}) &\leq 9L_f 2^{K-1} K (\|\varepsilon_{j+1}\|_H + \|\varepsilon_j\|_H) \max_{j-M_0 \leq k \leq j} \|\varepsilon_k\| \\ &\leq 27L_f 2^{K-2} K (\|\varepsilon_{j+1}\|_H + \|\varepsilon_j\|_H) \max_{j-M_0 \leq k \leq j} \|\varepsilon_k\|_H. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Оценим третье слагаемое в правой части (5.4). Имеем

$$(\hat{\psi}_j, \varepsilon_{j+\frac{1}{2}}) \leq \|\hat{\psi}_j\| \|\varepsilon_{j+\frac{1}{2}}\|. \quad (5.12)$$

Согласно лемме 4.2 выполняется

$$\|\hat{\psi}_j\|^2 = \sum_{i=1}^{N-1} h |\hat{\psi}_j|^2 \leq C_5^2 (\Delta^2 + h^4)^2 X,$$

то есть

$$\|\hat{\psi}_j\| \leq C_5 \sqrt{X} (\Delta^2 + h^4). \quad (5.13)$$

Учитывая оценку

$$\|\varepsilon_{j+\frac{1}{2}}\| \leq \frac{3}{2} \|\varepsilon_{j+\frac{1}{2}}\|_H \leq \frac{3}{4} (\|\varepsilon_{j+1}\|_H + \|\varepsilon_j\|_H),$$

из (5.12) и (5.13) получаем

$$(\hat{\psi}_j, \varepsilon_{j+\frac{1}{2}}) \leq \frac{3}{4} C_5 \sqrt{X} (\Delta^2 + h^4) (\|\varepsilon_{j+1}\|_H + \|\varepsilon_j\|_H). \quad (5.14)$$

Подставляя (5.5), (5.6), (5.11) и (5.14) в (5.4) и, сокращая на $(\|\varepsilon_{j+1}\|_H + \|\varepsilon_j\|_H)$, получаем

$$\frac{1}{2\Delta} (\|\varepsilon_{j+1}\|_H - \|\varepsilon_j\|_H) \leq 27L_f 2^{K-2} K \max_{j-M_0 \leq k \leq j} \|\varepsilon_k\|_H + \frac{3}{4} C_5 \sqrt{X} (\Delta^2 + h^4)$$

или

$$\|\varepsilon_{j+1}\|_H \leq \|\varepsilon_j\|_H + \Delta 27L_f 2^{K-1} K \max_{j-M_0 \leq k \leq j} \|\varepsilon_k\|_H + \Delta \frac{3}{2} C_5 \sqrt{X} (\Delta^2 + h^4). \quad (5.15)$$

Обозначим для краткости константы

$$A = 27L_f 2^{K-1} K, \quad B = \frac{3}{2} C_5 \sqrt{X}$$

и запишем следующую из (5.15) оценку для предыстории погрешности

$$\|\{\varepsilon_k\}_{j+1}\|_\tau \leq (1 + A\Delta) \|\{\varepsilon_k\}_j\|_\tau + B\Delta(\Delta^2 + h^4). \quad (5.16)$$

Из (5.16) выводится оценка

$$\|\{\varepsilon_k\}_j\|_\tau \leq \frac{B}{A} e^{AT} (\Delta^2 + h^4)$$

для всех $j = 1, \dots, M$. Откуда следует заключение теоремы. $\square$

6. Численные эксперименты

Пример 6.1. Рассмотрим тестовое уравнение с постоянным сосредоточенным запаздыванием:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = & d \frac{\partial^\alpha u}{\partial |x|^\alpha} + 3t^2 x^4 (1-x)^4 + u(x, t - \tau(t)) - (t - 0.5)^3 x^4 (1-x)^4 \\ & + \frac{t^3 d}{2 \cos \frac{\pi\alpha}{2}} \left[\frac{\Gamma(9)}{\Gamma(9-\alpha)} (x^{8-\alpha} + (1-x)^{8-\alpha}) - \frac{4\Gamma(8)}{\Gamma(8-\alpha)} (x^{7-\alpha} + (1-x)^{7-\alpha}) \right. \\ & + \frac{6\Gamma(7)}{\Gamma(7-\alpha)} (x^{6-\alpha} + (1-x)^{6-\alpha}) - \frac{4\Gamma(6)}{\Gamma(6-\alpha)} (x^{5-\alpha} + (1-x)^{5-\alpha}) \\ & \left. + \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\alpha)} (x^{4-\alpha} + (1-x)^{4-\alpha}) \right], \end{aligned}$$

где $x \in [0, 1]$, $t \in [0, 1]$, $\tau(t) = 0.5$, $d = 100$.

Заданы начальные

$$u(x, t) = t^3 x^4 (1-x)^4, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [-0.5, 0],$$

и граничные условия

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in [0, 1].$$

Точным решением является функция

$$u(x, t) = t^3 x^4 (1-x)^4.$$

Введем следующие обозначения:

$$E_H(\Delta, h) = \max_{0 \leq k \leq M} \|u_k - U_k\|_H,$$

$$u_k = (u(x_1, t_k), u(x_2, t_k), \dots, u(x_{N-1}, t_k)), \quad U_k = (U_k^1, U_k^2, \dots, U_k^{N-1}).$$

Метод (3.1) тестировался для различных шагов Δ и h . Были получены вычислительные порядки сходимости $order_\Delta = \log_2(\frac{E_H(2\Delta, h)}{E_H(\Delta, h)})$, $order_h = \log_2(\frac{E_H(\Delta, 2h)}{E_H(\Delta, h)})$ по Δ и h соответственно.

В таблице 1 показан вычислительный порядок сходимости по h .

Таблица 1

Зависимость погрешностей и вычислительных порядков сходимости от шагов h

α	Δ	h	$E_H(\Delta, h)$	$order_h$
1,1	1/4000	1/10	0,0000031166	
1,1	1/4000	1/20	0,0000001791	4,1211
1,1	1/4000	1/40	0,0000000103	4,1201
1,5	1/4000	1/10	0,0000051913	
1,5	1/4000	1/20	0,0000003065	4,0821
1,5	1/4000	1/40	0,0000000176	4,1222
1,9	1/4000	1/10	0,0000086378	
1,9	1/4000	1/20	0,0000005535	3,9640
1,9	1/4000	1/40	0,0000000341	4,0207

Таблица 2 показывает вычислительный порядок сходимости по Δ .

Таблица 2

Зависимость погрешностей и вычислительных порядков сходимости от шагов Δ

α	h	Δ	$E_H(\Delta, h)$	$order_\Delta$
1,1	1/1000	1/10	0,0000160075	
1,1	1/1000	1/20	0,0000039999	2,0007
1,1	1/1000	1/40	0,0000009999	2,0001
1,5	1/1000	1/10	0,0000160223	
1,5	1/1000	1/20	0,0000040036	2,0007
1,5	1/1000	1/40	0,0000010009	2,0000
1,9	1/1000	1/10	0,0000160299	
1,9	1/1000	1/20	0,0000040062	2,0005
1,9	1/1000	1/40	0,0000010014	2,0002

Пример 6.2. Рассмотрим тестовое уравнение с переменным запаздыванием:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = & d \frac{\partial^\alpha u}{\partial |x|^\alpha} + \alpha(t+1)^{\alpha-1} x^4 (1-x)^4 + u(x, t - \tau(t)) - \left(\frac{2(t+1)}{3}\right)^\alpha x^4 (1-x)^4 \\ & + \frac{(t+1)^\alpha d}{2 \cos \frac{\pi\alpha}{2}} \left[\frac{\Gamma(9)}{\Gamma(9-\alpha)} (x^{8-\alpha} + (1-x)^{8-\alpha}) - \frac{4\Gamma(8)}{\Gamma(8-\alpha)} (x^{7-\alpha} + (1-x)^{7-\alpha}) \right. \\ & + \frac{6\Gamma(7)}{\Gamma(7-\alpha)} (x^{6-\alpha} + (1-x)^{6-\alpha}) - \frac{4\Gamma(6)}{\Gamma(6-\alpha)} (x^{5-\alpha} + (1-x)^{5-\alpha}) \\ & \left. + \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\alpha)} (x^{4-\alpha} + (1-x)^{4-\alpha}) \right], \end{aligned}$$

где $x \in [0, 1]$, $t \in [0, 1]$, $\tau(t) = \frac{t+1}{3}$, $d = 1$.

Заданы начальные и граничные условия

$$u(x, t) = (t+1)^\alpha x^4 (1-x)^4, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [-1/3, 0].$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in [0, 1].$$

$u(x, t) = (t+1)^\alpha x^4 (1-x)^4$ — точное решение.

Метод (3.1) тестировался для различных шагов Δ и h . В таблице 3 показан вычислительный порядок сходимости по h .

Таблица 3

Зависимость погрешностей и вычислительных порядков сходимости от шагов h

α	Δ	h	$E_H(\Delta, h)$	$order_h$
1,1	1/4000	1/10	0,0000064160	
1,1	1/4000	1/20	0,0000003705	4,1141
1,1	1/4000	1/40	0,0000000216	4,1004
1,5	1/4000	1/10	0,0000139590	
1,5	1/4000	1/20	0,0000008242	4,0821
1,5	1/4000	1/40	0,0000000473	4,1231
1,9	1/4000	1/10	0,0000307599	
1,9	1/4000	1/20	0,0000019696	3,9651
1,9	1/4000	1/40	0,0000001213	4,0213

Таблица 4 показывает вычислительный порядок сходимости по Δ .

Таблица 4

Зависимость погрешностей и вычислительных порядков сходимости от шагов Δ

α	h	Δ	$E_H(\Delta, h)$	$order_\Delta$
1,1	1/1000	1/10	0,0000001679	
1,1	1/1000	1/20	0,0000000419	2,0026
1,1	1/1000	1/40	0,0000000105	1,9966
1,5	1/1000	1/10	0,0000015431	
1,5	1/1000	1/20	0,0000003845	2,0048
1,5	1/1000	1/40	0,0000000960	2,0019
1,9	1/1000	1/10	0,0000045433	
1,9	1/1000	1/20	0,0000011142	2,0277
1,9	1/1000	1/40	0,0000002775	2,0055

References

- [1] J. Wu, *Theory and Application of Partial Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [2] A. D. Polyanin, V. G. Sorokin, A. I. Zhurov, *Delay Ordinary and Partial Differential Equations*, CRC Press, Boca Raton, 2023.
- [3] Z. Kamont, K. Kropielnicka, “Implicit difference methods for evolution functional differential equations”, *Numerical Analysis and Applications*, **4:4** (2011), 294–308.
- [4] В. Г. Пименов, *Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью*, Изд-во Уральского университета, Екатеринбург, 2014. [V. G. Pimenov, *Difference Methods for Solving Partial Differential Equations with Heredity*, Publishing House of the Ural University, Yekaterinburg, 2014 (In Russian)].
- [5] M. M. Meerschaert, C. Tadjeran, “Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations”, *Applied Numerical Mathematics*, **56:1** (2006), 80–90.
- [6] C. Tadjeran, M. M. Meerschaert, H. P. Scheffler, “A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation”, *Journal of Computational Physics*, **213:1** (2006), 205–213.
- [7] C. Celik, M. Duman, “Crank–Nicolson method for the fractional diffusion equation with the Riesz fractional derivative”, *Journal of Computational Physics*, **231:4** (2012), 1743–1750.
- [8] W. Tian, H. Zhou, W. Deng, “A class of second order difference approximations for solving space fractional diffusion equations”, *Mathematics of Computation*, **84** (2015), 1703–1727.
- [9] V. G. Pimenov, A. S. Hendy, “A fractional analog of Crank–Nicholson method for the two sided space fractional partial equation with functional delay”, *Ural Mathematical Journal*, **2:1** (2016), 48–57.
- [10] M. Ibrahim, V. G. Pimenov, “Crank–Nicolson scheme for two-dimensional in space fractional diffusion equations with functional delay”, *Izv. IMI UdGU*, **57** (2021), 128–141.
- [11] В. Г. Пименов, А. Б. Ложников, “Асимптотическое разложение погрешности численного метода для решения супердиффузионного уравнения с функциональным запаздыванием”, Тр. ИММ УрО РАН, **30**, №2, 2024, 138–151. [V. G. Pimenov, A. B. Lozhnikov, “Asymptotic expansion of the error of a numerical method for solving a superdiffusion equation with functional delay”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, **30**, no. 2, 2024, 138–151 (In Russian)].
- [12] G. H. Gao, Z. Z. Sun, “A compact finite difference scheme for the fractional sub-diffusion equations”, *Journal of Computational Physics*, **230:3** (2011), 586–595.
- [13] A. S. Hendy, J. E. Macias–Diaz, “A discrete Gronwall inequality and energy estimates in the analysis of a discrete model for a nonlinear time-fractional heat equation”, *Mathematics*, **8:9** (2020), 1–15.

- [14] H. Sun, Z. Z. Sun, G. H. Gao, “Some high order difference schemes for the space and time fractional Bloch–Torrey equations”, *Applied Mathematics and Computation*, **281** (2016), 356–380.
- [15] L. Li, B. Zhou, X. Chen, Z. Wang, “Convergence and stability of compact finite difference method for nonlinear time fractional reaction–diffusion equations with delay”, *Applied Mathematics and Computation*, **337** (2018), 144–152.
- [16] А. В. Ким, В. Г. Пименов, *i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений*, Регулярная и хаотическая динамика, Москва–Ижевск, 2004. [A. V. Kim, V. G. Pimenov, *i-Smooth Analysis and Numerical Methods for Solving Functional Differential Equations*, Regular and Chaotic Dynamics, Moscow–Izhevsk, 2004 (In Russian)].

Информация об авторах

Пименов Владимир Германович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой вычислительной математики и компьютерных наук, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина; ведущий научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: v.g.pimenov@urfu.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4042-6079>

Лекомцев Андрей Валентинович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и компьютерных наук, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: avlekomtsev@urfu.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0176-1306>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Лекомцев Андрей Валентинович
 E-mail: avlekomtsev@urfu.ru

Поступила в редакцию 07.10.2024 г.
 Поступила после рецензирования 18.11.2024 г.
 Принята к публикации 22.11.2024 г.

Information about the authors

Vladimir G. Pimenov, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Computational Mathematics and Computer Science Department, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin; Leading Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: v.g.pimenov@urfu.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4042-6079>

Andrei V. Lekomtsev, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Computational Mathematics and Computer Science Department, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: avlekomtsev@urfu.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0176-1306>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Andrei V. Lekomtsev
 E-mail: avlekomtsev@urfu.ru

Received 07.10.2024
 Reviewed 18.11.2024
 Accepted for press 22.11.2024